Coordenadas Polares

M. I. Caicedo

Departamento de Física, USB

Índice

1. Introducción

Hasta este momento hemos estudiado la cinemática y la dinámica de unos cuantos problemas en los cuales lo sencillo de la geometría nos ha sido de gran ayuda. En aplicaciones más realistas, el modelado de situaciones físicas puede complicarse enormemente y una de las causas de las complicaciones puede ser algo tan simple como un cambio en la geometría de una trayectoria. En los ejemplos y problemas que hemos estudiado hasta este punto siempre ha resultado que aquellos más engorrosos han sido los asociados a movimientos curvilíneos (circulares por ejemplo).

En estos apuntes vamos a ver como es posible simplificar muchos de estos problemas con el sencillo mecanismo de utilizar un sistema de coordenadas adaptado especialmente a la geometría de los movimientos que queremos estudiar.

2. La Base de Vectores Móviles

Consideremos una partícula puntual que describe una trayectoria circular de radio R, sean: θ el ángulo que forman el eje x y $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición de la partícula en versiones futuras hacer el dibujito.

Un ejercicio elemental de geometría, con el que ya deberímos tener bastante experiencia, nos permite expresar el vector de posición en la forma:

$$\mathbf{r}(t) = R\ [cos\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x + sen\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_y]\ , \tag{1}$$

en donde estamos destacando que, en vista de que la partícula se mueve sobre un círculo de radio R (i.e. $|\mathbf{r}(t)| = R$, toda la dependencia temporal de $\mathbf{r}(t)$ tiene que estar en el ángulo.

Es facil darse cuenta de que podemos rescribir el vector de posición en la forma

$$\mathbf{r}(t) = R\,\hat{\mathbf{u}}_r(t) \tag{2}$$

donde el vector $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$ está dado por

$$\hat{\mathbf{u}}_r(t) \equiv\ cos\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x + sen\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{3}$$

Arriesgándonos a estar llamando la atención sobre algo demasiado obvio notemos que $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$ es un vector que tiene tres propiedades:

1. *es un vector unitario*

2. *en cada instante de tiempo $\hat{\mathbf{u}}_r$ es paralelo al vector de posición $\mathbf{r}$ y en consecuencia:*

3. *es un vector variable (su dependencia en el tiempo es implícita ya que está asociada al hecho de que $\hat{\mathbf{u}}_r$ depende en forma explícita del angulo θ).*

En vista de la última de estas propiedades tiene sentido plantearse el cálculo de la derivada temporal de $\hat{\mathbf{u}}_r$, cuyo resultado es el siguiente:

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}}_r(t) = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)\ [-sen\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x + cos\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_y\,]\ , \tag{4}$$

esta expresión contiene dos factores. El primero ($\dot{\theta}$) proviene de la aplicación de la regla de la cadena para la diferenciacin de funciones compuestas, mientras que el segundo, a saber, el vector:

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \equiv \ -sen\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x + cos\theta(t)\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{5}$$

es un nuevo versor variable que tambien posee propiedades bonitas, a saber

1. *al igual que su pariente $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$, es un vector unitario dependiente del tiempo.*

2. *$\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)$ es ortogonal al vector $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$*

3. *La orientación de $\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)$ es en el sentido en que aumenta el ángulo θ.*

La segunda de estas propiedades es la más evidente y podemos verificarla de dos maneras. En primer lugar y recordando lo que ya hemos estudiado en varios problemas $\hat{\mathbf{u}}_r$ es un vector de módulo constante y por lo tanto su derivada ($\dot{\hat{\mathbf{u}}}_r$) tiene que ser ortogonal a $\hat{\mathbf{u}}_r$, como $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ es proporcional a la derivada de $\hat{\mathbf{u}}_r$ tiene que ser ortogonal a este. La otra prueba consiste en calcular el producto escalar entre ambos versores y se deja como ejercicio.

Ahora bien[1], como $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ son <u>vectores ortonormales</u> constituyen una base del plano, de manera que todo vector $\mathbf{B}$ en el plano $x-y$ puede escribirse como combinación lineal de ambos vectores, es decir, en la forma

$$\mathbf{B} = b_r\,\hat{\mathbf{u}}_r + b_\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \tag{6}$$

En este punto vale la pena calcular la derivada temporal de $\hat{\mathbf{u}}_\theta$, el resultado es sencillo,

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\ [cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_x + sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_y] = -\dot{\theta}\ \hat{\mathbf{u}}_r \tag{7}$$

[1]de ahora en adelante y solo para simplificar las fórmulas no escribiremos explícitamente la dependencia en t

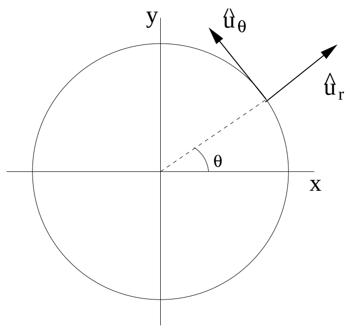


Figura 1: Los vectores polares $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$. Nótese que se deben entender como vectores móviles cuyo origen está localizado en el punto en que se encuentra la partícula

En resumen, la base de vectores del plano que hemos construído, denominada base de vectores polares, está constituida por un par versores ortogonales dependientes del tiempo $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ que satisfacen las siguientes relaciones diferenciales.

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}}_r = \dot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \tag{8}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\theta = -\dot{\theta}\;\hat{\mathbf{u}}_r \tag{9}$$

Por cierto, estas propiedades son válidas independientemente de la manera de escoger el ángulo polar (θ), podríamos haberlo definido como el ángulo que el vector de posición forma con el eje y o cualquier otra cosa (con sentido, por supuesto).

3. Movimiento circular

3.1. Velocidad y aceleración en la base móvil

Estamos interesados en encontrar expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula en movimiento circular. Para ello utilizaremos los vectores que acabamos de introducir y las relaciones entre ellos. Recordando que la posición de la partícula está dada por

$$\mathbf{r} = R\,\hat{\mathbf{u}}_r \tag{10}$$

y diferenciando obtenemos:

$$\mathbf{v} = R\,\dot{u}_r = R\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \tag{11}$$

como bien sabemos, la velocidad es tangente a la trayectoria lo que queda claramente evidenciado en la fórmula que acabamos de encontrar, en que la velocidad es proporcional al vector $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ que efectivamente es tangente al círculo de radio R. La cantidad $R\,\dot{\theta}$ no es otra cosa que la rapidez instantánea del movimiento circular y a veces es denominada *velocidad tangencial*.

Análogamente, derivando la velocidad ($\mathbf{v}$) se obtiene la siguiente expresión para la aceleración de un movimiento circular:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta + R\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\theta = \\ &= -R\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r + R\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned} \tag{12}$$

El primer término ($-R\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{u}}_r$) radial y con sentido hacia el centro de coordenadas, es denominado *aceleración centrípeta*, mientras que el segundo ($R\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta$) es conocido como aceleración tangencial.

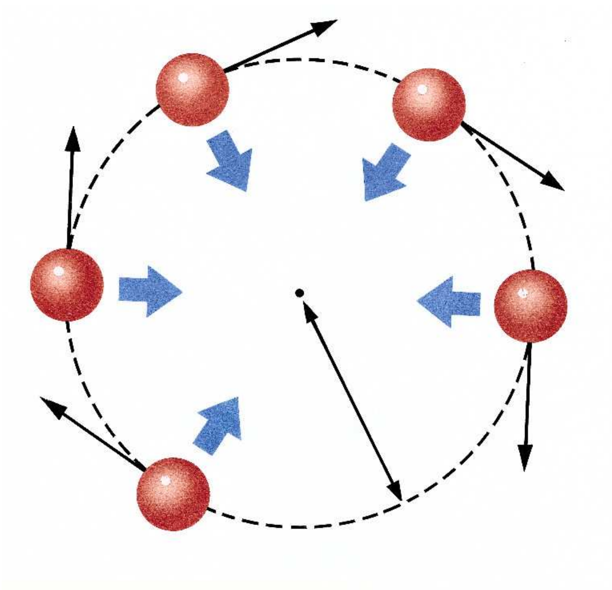


Figura 2: Aun cuando la tasa de rotación ó velocidad angular $\dot{\theta}$ sea constante, el cambio en dirección de la velocidad implica que en un movimiento a lo largo de una trayectoria circular siempre hay aceleración

Para dar una interpretación física a cada uno de estos términos consideremos la velocidad instantánea de una partícula en movimiento circular en dos instantes muy cercanos t y $t + \Delta t$, esto es, queremos comparar $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{v}(t + \Delta t)$. En vista de que $\vec{a}$ es la aceleración instantánea y de que Δt es un intervalo temporal muy corto podemos poner

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t + \Delta t) &\approx \mathbf{v}(t) + \vec{a}(t)\,\Delta t = \\ &= \mathbf{v}(t) + \Big(-R(\dot{\theta}(t))^2)\,\hat{\mathbf{u}}_r(t) + R\ddot{\theta}(t)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\Big)\ \Delta t = \\ &= R\left(\dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)\,\Delta t\right)\ \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) - R(\dot{\theta}(t))^2\,\Delta t\,\hat{\mathbf{u}}_r(t) \end{aligned} \tag{13}$$

en la última línea salta a la vista que la aceleración centrí peta es la componente de la aceleración responsable del cambio de dirección del vectro de velocidad instantánea.

Por otra parte, si calculamos el cuadrado de la la rapidez en el instante $t+\Delta t$ ($v^2(t+\Delta t)$):

$$v^2(t+\Delta t) \quad = \quad \mathbf{v}(t+\Delta t).\mathbf{v}(t+\Delta t) \tag{14}$$

resulta:

$$v^2(t+\Delta t) = R^2\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\Delta t\right) + (ters)(\Delta t)^2 \tag{15}$$

donde la expresión $(ters)(\Delta t)^2$ engloba a todos los términos con un factor Δt^2 que -por ser Δt un intervalo muy corto- son despreciables. En definitiva

$$v^2(t+\Delta t) \approx R^2\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\Delta t\right) \tag{16}$$

fórmula en que se aprecia que los cambios en la rapidez provienen única y exclusivamente de la aceleración tangencial.

3.2. Ejemplos

Ejemplo 1 *El objetivo de este ejemplo consiste en convencerle de las ventajas de utilizar las coordenadas polares. La figura muestra dos collarines conectados entre si. Uno de ellos está obligado a moverse a lo largo de una guía circular por medio de un pasador. En el instante que se muestra (t_0), $y(t_0) = y_0 = 150\,mm$, $\dot{y}(t_0) = v_{0y} = 300\ mm/s$ y $\ddot{y}(t_0) = a_{0y} = 0$. ¿Cuales on las magnitudes de la velocidad y la aceleración del pasador que obliga al primer collarín a moverse sobre un círculo?. Es evidente que si echamos mano de la geometría del dispositivo y colocamos el origen en el centro de la pieza, el vector* **r** *de posición del pasador que se mueve en arco y el ángulo θ que* **r** *hace con la horizontal podemos utilizar coordenadas polares para expresar la*

posición del pasador como

$$\mathbf{r} = R\,\hat{\mathbf{u}}_r, \tag{17}$$

donde $R = 300\,mm$.

Por otra parte, debido a los vínculos impuestos por las guías, la altura del pasador (y) que se mueve a lo largo de la guía vertical es igual a la del primer pasador, es decir:

$$y(t) = R\,sen\theta(t)\,. \tag{18}$$

por lo tanto, en el instante que nos interesa ($\theta(t_0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ *y* $\ddot{\theta}(t_0) = \alpha_0$)

$$y_0 \;=\; R\,sen\theta_0 = 150 \tag{19}$$

$$v_{0y} \;=\; -R\,\omega_0\,cos\theta_0 = 200\;mm/seg \tag{20}$$

$$a_{0y} \;=\; -R\,(\alpha_0\,cos\theta_0 + \omega_0^2 sen\theta_0) = 0 \tag{21}$$

Estas ecuaciones nos permiten determinar los valores de θ_0, ω_0 *y* α_0. *Evidentemente,* $sen\theta_0 =$

1/2 *(lo que implica que* $cos\theta = \sqrt{3}/2$ *y quedamos con*

$$\omega_0 = -\frac{v_{0y}}{R\cos\theta_0} \tag{22}$$

$$\alpha_0 = -\frac{sen\theta_0}{cos\theta_0}\,\omega_0^2 \tag{23}$$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$\omega_0 = -\frac{300\times 2}{300\,\sqrt{3}} = 2\frac{\sqrt{3}}{3} = 1{,}73\,s^{-1} \tag{24}$$

$$\alpha_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{4}{3} = 0{,}77\,s^{-2} \tag{25}$$

Ahora bien, ya hemos aprendido a calcular las expresiones polares para la velocidad y la aceleración de un movimiento circular utilizando la base de vectores móviles: fórmulas 11 y 12. De dichas fórmulas se obtienen sin problema los valores de la rapidez y la magnitud de la aceleración del pasador que se encuentra en la guía circular

$$v = |R\dot{\theta}| \tag{26}$$

$$|\mathbf{a}|^2 = R^2\ddot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^4 \tag{27}$$

Sustituyendo los valores numéricos que hemos encontrado antes, encontramos que las magnitudes de la velocidad y la aceleración del pasador que se mueve en la guía circular son $\dot{s} = 519\,mm/s$ y $a =$

Observe cuidadosamente que, a pesar de que el pasador que se encuentra en la guía vertical no esta acelerando en el instante que nos interesa, el otro si acelera aun cuando hay un vínculo entre ambos (sus alturas respecto al piso son las mismas en todo instante). Esto le podría parecer extraño, pero no lo es. Recuerde que el pasador de que nos estamos ocupando se mueve en una trayectoria circular y que esto obliga (aún si no hubiera acelercación angular) a un cambio de la velocidad en cada instante es decir a la prescencia de aceleración.

Ejemplo 2 *El ejemplo anterior es de cinemática pura, en este nuevo ejemplo vamos a emplesar la tecnología que estamos estudiando para atacar un problema de dinámica.*

Un péndulo simple no es otra cosa que una masa suspendida de un techo por un cable ideal y que realiza un movimiento en un plano.

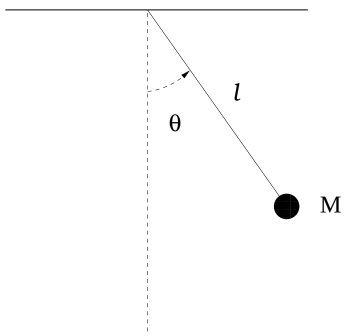


Figura 3: El Péndulo. Observe que ya hemos escogido el sentido en que mediremos el ángulo θ.

Es claro que las únicas fuerzas que actúan sobre el péndulo son el peso y la fuerza ejercida por el cable, de manera que la segunda ley de Newton para este sistema es sencillamente:

$$\mathbf{T} + \mathbf{w} = M\mathbf{a} \tag{28}$$

Para enfrentar el problema debemos expresar la tensión, el peso y la aceleración como combinaciones lineales de una base del plano del movimiento. Con este fin escogemos el origen de coordenadas en el punto de suspensión del péndulo y utilizamos coordenadas polares. La tensión está dirigida a lo largo del cable de suspensión, y en consecuencia es radial, por lo tanto:

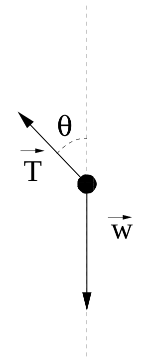


Figura 4: El diagrama de cuerpo libre para M

$\mathbf{T} = T\,\hat{\mathbf{u}}_r$ *donde* T *es una incógnita del problema. El peso se puede descomponer en la base polar sin mayor problema y se obtiene:*

$$\mathbf{w} = M\,g\,\left(cos\theta\,\hat{\mathbf{u}}_r - sen\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right) \tag{29}$$

Por otra parte, si usamos el argumento de que la cuerda es inextensible podemos asegurar que el movimiento de la masa es a lo largo de un arco de círculo de radio ℓ*, de manera que su aceleración está dada por la fórmula*

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r + \ell\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \tag{30}$$

En definitiva, en la base polar la segunda ley de Newton para M *se expresa como:*

$$(T + M\,g\,cos\theta\,)\,\hat{\mathbf{u}}_r - M\,g\,sen\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta = M\left[-\ell\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r + \ell\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right] \tag{31}$$

de donde siguen inmediatamente las ecuaciones de movimiento

$$T + Mg\,cos\theta = -M\ell\dot{\theta}^2 \tag{32}$$

$$-M\,g\,sen\theta = M\ell\ddot{\theta} \tag{33}$$

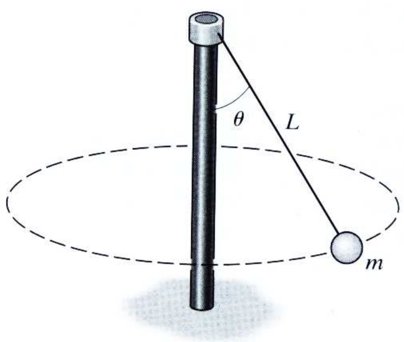
que se pueden reescribir en la forma:

$$T = -M\left(gcos\theta + \ell\dot{\theta}^2\right) \quad (34)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}sen\theta \quad (35)$$

que son las ecuaciones de movimiento para el péndulo

Ejemplo 3 *La figura adjunta muestra un pequeño cuerpo que, suspendido por un cable, lleva a cabo un movimiento circular con velocidad angular constante ω. Encuentre (i) la velocidad angular que permite que ángulo que forman el cable de suspensión y la vertical sea θ y (ii) la tensión en el cable.*



Para resolver el problema es conveniente introducir un triedro ortonormal móvil muy conectado con la base $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta)$ con que hemos estado trabajando. En la notación que vamos a utilizar el triedo está formado por los vectores $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}, \hat{\mathbf{z}})$. El tercer versor corresponde al vector unitario a lo largo del eje z, y los otros dos tienen la misma interpretación que $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta)$, con la salvedad de que el ángulo de giro alrededor del eje z se denomina convencionalmente ϕ.

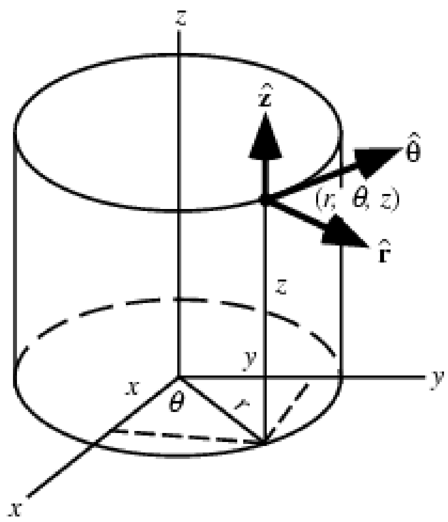


Figura 5: La base movil cilíndrica $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}, \hat{\mathbf{z}})$

Como el movimiento del cuerpo es circular y las fuerzas que actúan sobre m son solo el peso y la tensión ejercida sobre el cable podemos asegurar que:

$$-m\,R\,\omega^2\,\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + \mathbf{W}\,, \tag{36}$$

donde R, el radio de giro está dado por $R = L\,sen\theta$. Al descomponer las fuerzas en términos de la base movil resulta

$$\mathbf{W} = -mg\,\hat{\mathbf{z}} \tag{37}$$

$$\mathbf{T} = T\ (sen\theta\,\hat{\mathbf{r}} + cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})\ . \tag{38}$$

De acuerdo a nuestros resultados parciales, la ecuación de movimiento del cuerpo es sencillamente

$$T\ (sen\theta\,\hat{\mathbf{r}} + cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}) - mg\,\hat{\mathbf{z}} = -m\,R\,\omega^2\,\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{39}$$

esto implica

$$T\,cos\theta = -mg \tag{40}$$

$$T\,sen\theta = -m\,L\,sen\theta\,\omega^2\,. \tag{41}$$

De acá se obtiene que para que el ángulo que el cable hace con la vertical sea θ se requiere una tasa de rotación

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\,cos\theta}}\,, \tag{42}$$

este resultado es muy interesante ya que se nota claramente que si se pretende que θ se acerque a los 90° es menester que la tasa de rotación (ω) sea enorme.

Finalmente, la fuerza que el cable ejerce sobre el cuerpo es

$$\mathbf{T} = -mg\,\left[tan(\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{z}}\right]\,, \tag{43}$$

este resultado también resulta muy interesante, cuando $\omega = 0$ (es decir, si no hay movimiento), la magnitud de la tensión es igual a mg, esto es esperable ya que en tal caso el cable compensa exactamente la gravedad. Ahora bien, cuando ω crece también lo hace el ángulo y en consecuencia la magnitud de la tensión crece sin cota haciéndose infinita en el límite en que $\theta = 90^\circ$

4. Movimiento general en el plano

4.1. Coordenadas polares

Consideremos ahora un movimiento general en el plano. Es claro que si se escoge un origen fijo, la posición de la partícula expresada en los sistemas de coordenadas cartesiano y polar

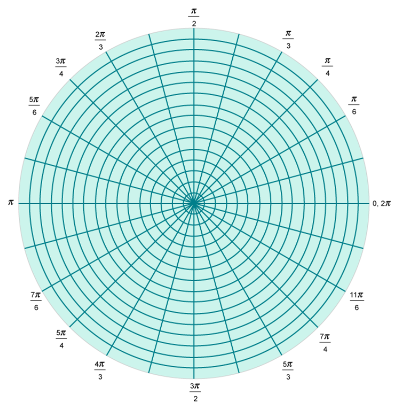


Figura 6: Las coordenadas polares en el plano no son más que una malla constituida por circulos concéntricos y líneas radiales. Al dar un par de números r y θ estamos localizando el punto de intersección entre un círculo y una línea radial. Los vectores de la base polar son tangentes a estas líneas coordenadas cirvas

será:

$$\mathbf{r} = x(t)\hat{\mathbf{e}}_x + y(t)\hat{\mathbf{e}}_y = r\,\hat{\mathbf{u}}_r \tag{44}$$

donde ahora debemos entender que el factor r (la magnitud del vector de posición de la partícula) es variable en general. Este es el momento adecuado para destacar que las coordenadas cartesianss (x, y) están siendo sustituidas por un nuevo conjunto de variables (r, θ) que se conocen como coordenadas polares de la partícula.

Usando las propiedades de la base polar estudiadas en la sección 2 podemos expresar la velocidad de la partícula en la forma

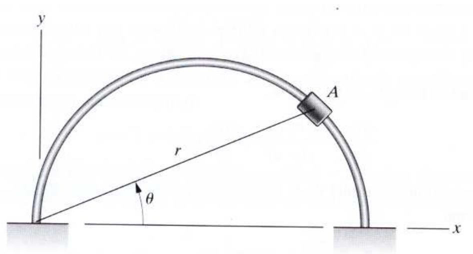
$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \tag{45}$$

el factor $\dot{r}$ que aparece en el primer término de la igualdad 45 es la tasa de cambio de la distancia entre la partícula y el origen de coordenadas. Derivando una vez más y reordenando un poco los términos, encontramos que la aceleración en coordenadas polares está dada por:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{u}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \tag{46}$$

Vale la pena observar que si el módulo del vector de posición es constante es decir si consideramos un movimiento circular $r(t) = R$ las fórmulas que acabamos de encontrar se reducen a las que encontramos en la sección 3.

Ejemplo 4 *El collarín (A) de la figura se desliza sobre una guía circular. La posición radial del collarín está dada por $r = 2\,cos\theta\ m$. En el instante representado $\theta = 25°$ y $\dot{\theta} = 4\ rad/s$, y $\ddot{\theta} = 0$.*



Encuentre la velocidad y la aceleración del pasador.

Esta situación física es muy divertida, a pesar de que el movimiento del pasador es circular no se ha escogido al centro del circulo como origen de coordenadas, lo que trae como consecuencia que el radio no sea constante. De todas maneras, la posición del collarín está dada por la fórmula

$$\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{e}}_r\,, \tag{47}$$

con $r = R\,cos\theta$ *(*$R = 2\,m$*). Tambien conocemos la expresión general para la velocidad (fórmula 45) que al sustituir* $\dot{r} = -R\dot{\theta}sen\theta$ *produce el resultado:*

$$\mathbf{v} = -R\dot{\theta}sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = R\dot{\theta}cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = R\dot{\theta}\,(-sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta)\ . \tag{48}$$

A primera vista este resultado es algo extraño, el movimiento es circular y uno espera que la velocidad sea tangente a la trayectoria y...hasta donde sabemos $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ *es el vector tangente al círculo, ¿qué está pasando?.*

La respuesta es sencillísima, estamos cometiendo la "torpeza" de utilizar coordenadas polares cuyo centro no coincide con el centro del arco circular constituido por la guía sobre la que se desplaza el collarín y por lo tanto, ni el vector radial $\hat{\mathbf{e}}_r$ *corresponde con las radiales de la guía ni el vector* $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ *a su vector tangente. De hecho, el vector unitario tangente a la guía no es otro que*

$$\hat{\mathbf{e}}_{||} = -sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,. \tag{49}$$

Podemos calcular $\ddot{r}$ *sin mayor dificultad para sustituirlo en la fórmula general 46 obteniéndose*

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\ (-sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta) - 2R\dot{\theta}^2\ (cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta)\ . \tag{50}$$

De nuevo tenemos algo inusual, el vector que acompaña al segundo sumando de esta expresión. Ahora bien, una inspección rápida nos convencerá de que este vector es ortogonal a $\hat{\mathbf{e}}_{||}$*, y por lo tanto paralelo a los radios de la guía, mientras que una investigación algo más cuidadosa nos hará notar que además el vector está orientado hacia afuera. Estas consideraciones nos permiten expresar la aceleración como:*

$$\mathbf{a} = -2R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_\perp + R\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_{||}\,. \tag{51}$$

Sin duda alguna esta última fórmula se parece mucho a nuestra vieja fórmula para un movimiento circular, sin embargo aún hay algo raro, en el primer término no aparece R sino $2R$ mie ntras que el segundo término si tiene una apariencia convencional.

Una vez más las cosas simples siempre tienen explicaciones simples. El ángulo θ que se define en la figura no esta medido desde el centro del círculo. Denotemos por ϕ al ángulo que forman el eje x y un radio de la guía que pase por el collarín, no es dificil demostrar que θ y ϕ están relacionados por el vínculo

$$\phi = 2\theta\,, \tag{52}$$

por otra parte, la cantidad R que aparece en la fórmula $r = R\,cos\theta$ no es el radio de la guía, de hecho, es su diámetro (basta con notar que cuando $\theta = 0$ el collarín está a distancia R del origen de las coordenadas polares y que tal distancia es el diámetro de la guía).

En vista de nuestras observaciones más recientes, si llamamos R_G al radio de la guía, podemos cambiar R por $2R_G$ y θ y sus derivadas por $\phi/2$ y sus derivadas en todas las fórmulas para obtener finalmente:

$$\mathbf{a} = -2\,(2R_G)(\frac{d\phi/2}{dt})^2\,\hat{\mathbf{e}}_\perp + (2R_G)\frac{d^2\phi/2}{dt^2}\,\hat{\mathbf{e}}_{||}\,, \tag{53}$$

es decir,

$$\mathbf{a} = -R_G\dot{\phi}^2\,\hat{\mathbf{e}}_\perp + R_G\ddot{\phi}\,\hat{\mathbf{e}}_{||}\,. \tag{54}$$

expresión en que reconocemos perfectamente los términos de aceleración tangencial y centrípeta de un movimiento circular de radio R_G.

5. Círculo osculador y movimiento en el plano

El ejemplo 4 nos permite llamar la atención sobre un resultado general muy interante sobre el que queremos llamar la atención. Puede demostrarse que en cada punto (Q) de una curva suave en el plano puede construirse un único círculo tangente que se caracteriza por constituir el círculo tangente a la curva que mejor la aproxima en Q, este objeto geométrico es denominado *circulo osculador* a la curva en Q. En cada punto de su trayectoria el movimiento de una partícula

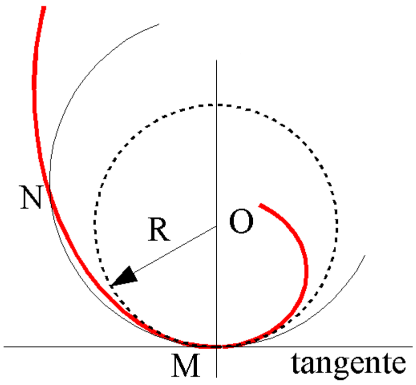


Figura 7: En la figura se muestran dos círculos tangentes a la curva coloreada. El círculo de centro O y radio R que toca a la curva en M es el círculo osculador, el otro, que corta a la curva en N es de radio mayor y no aproxima tan bien a la curva como el círculo osculante

puede describirse en términos de cantidades asociadas al círculo osculador de la trayectoria en el punto (P) considerado de manera que la velocidad y la aceleración de la partícula pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{e}}_T \tag{55}$$

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R}\,\hat{\mathbf{e}}_\perp + \dot{v}\,\hat{\mathbf{e}}_T\,. \tag{56}$$

donde v y R son la rapidez de la partícula y el radio del círculo osculador en P (denominado radio de curvatura de la curva en P) mientras que $\hat{\mathbf{e}}_{||}$ y $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ son el versor tangente a la curva que es paralelo a la velocidad de la partícula y un vector ortogonal que es paralelo al radio del círculo osculador que une su centro con la partícula.

6. Un problema importante

Este problema-ejemplo le dotará de nuevas herramientas matemáticas que serán de utilidad cuando estudie el oscilador armónico (el último tema de este curso).

Imagine un experimento educativo realizado en el interior del transbordador espacial durante un viaje orbital. Una guía recta está adaptada a un mecanismo que la hace rotar en un plano a tasa uniforme ω_0. Un collarín colocado en la guía puede deslizarse a lo largo de esta sin rozamiento. Nuestra intuición nos dice que la tendencia del collarín es moverse alejándose del centro de rotación.

No tenemos al transbordador espacial a nuestra disposición, pero podemos llevar a cabo un *Gedankenexperiment* (un experimento mental), utilizando nuestros conocimientos de mecánica Newtonianan para "observar" el movimiento del collarín y confirmar (ó desechar) nuestra intuición.

Nuestras primeras observaciones teóricas son las siguientes, desde el punto de vista cinemático, el movimiento el collarín solo tiene una variable independiente: la distancia al centro de rotación de la guía porque el ángulo polar que podría interesarnos está restringido (es decir, hay un vínculo) ya que el movimiento del collarín ocurre con velocidad angular constante: $\dot{\theta} = \omega_0$. La única fuerza que actúa sobre el collarín es la reacción que sobre dicho objeto ejerce la guía

$(\mathbf{\Lambda})$.

Recurriendo a las coordenadas polares y recordando que no hay roce podemos expresar la reacción como $\mathbf{\Lambda} = \lambda_\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta$ lo que lleva nos permite escribir inmediatamente las ecuaciones de movimiento (m es la masa del collarín):

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 && (57) \\ \lambda_\theta &= 2m\dot{r}\,. && (58) \end{aligned}$$

Al sustituir $\dot{\theta} = \omega_0$ en la primera de las ecuaciones queda

$$\ddot{r} = \omega^2\, r\,. \tag{59}$$

Ahora bien, esta es una ecuación en que la incógnita es una función ($r(t)$) aparece diferenciada, una ecuación así se denomina ecuación diferencial, más aún, como la derivada más alta que aparece es de segundo orden, no hay un término independiente y los coeficientes son constantes, la ecuación recibe el nombre de: *ecuación diferencial de segundo orden homogénea a coeficientes constantes* comentar que estas cosas son superimportantes en diversas áreas de la ingeniería: circuitos eléctricos lineales, teoría de control, ... que se yo.

Existe una técnica estandar para resolver una de estas ecuaciones. La técnica proviene de notar que la única manera de que una función pueda satisfacer la ecuación es que su derivada segunda sea, al menos, proporcional a la función. La función más sencillla (no constante) que posee esta característica es por supuesto la función exponencial.

De acuerdo a la idea que acabamos de exponer propongamos $r(t) = e^{\lambda\,t}$ en calidad de prueba. La segunda derivada temporal de esta función es $\lambda^2\,e^{\lambda\,t}$, así que al sustituir nuestra solución "adivinada" en la ecuación 59 obtenemos:

$$\lambda^2\, e^{\lambda\, t} = \omega_0^2\, e^{\lambda\, t}\,. \tag{60}$$

Ahora bien, las exponenciales no se anulan nunca lo que nos permite asegurar que la igualdad solo es posible si

$$\lambda^2 = \omega_0^2\,. \tag{61}$$

Es decir, $\lambda = \pm\omega_0$, esto tiene una implicación algo curiosa, las funciones $r_+(t) = e^{\omega_0\, t}$ y $r_-(t) = e^{\omega_0\, t}$ son soluciones de la ecuación diferencial 59 lo que lleva a las preguntas: ¿cuál solución utilizaremos? y ¿cómo decidimos?.

Afortunadamente los matemáticos han estudiado este problema desde hace varios siglos, de hecho, los mismísimos Newton y su rival Leibniz se toparon con las ecuaciones diferenciales. De hecho, usted ya ha tenido algún encuentro con ellas cuando ha calculado una primitiva, ya que al poner $f(x) = \int dx\, u(x) + C$ usted está resloviendo la ecuación diferencial $f'(x) = u(x)$.

Examinaremos lo que los matemáticos han descubierto usando las herramientas de que disponemos. La primera observación que podemos hacer es la siguiente, si A y B son constantes la función $r(t) = A\, r_+(t) + B\, r_-(t)$ también es una solución de la ecuación 59, esto nos lleva directamente a una segunda observación, si tuviéramos un conjunto de varias soluciones $r_1(t)$, $r_2(t)$, $\ldots$ $r_N(t)$ la combinación lineal

$$r(r) = A_1\, r_1(t) + A_2\, r_2(t) + \ldots A_N\, r_1(t)\,, \tag{62}$$

formada con las N constantes A_1, A_2, etc. tambiés sería una solución. ¡Que lindo!, es como si las soluciones de la ecuación 59 fueran vectores. Asíes en efecto, los matemáticos lo han demostrado rigurosamente, más aún, han probado que las soluciones de una ecuación diferencial homogénea a coeficientes constantes de orden p constituyen un espacio de vectores de p dimensiones.

Limitémonos a nuestro problema, los matemáticos han demostrado que el conjunto de soluciones de la ecuación 59 es un espacio vectorial de dos dimensiones. En otra palabras, si consigo dos vectores (soluciones) $r_1(t)$ y $r_2(t)$ de la ecuación que no sean proporcionales podré escribir la solución más general de la ecuación en la forma:

$$r(r) = A_1\, r_1(t) + A_2\, r_2(t)\,. \tag{63}$$

¡Caray! esto ya lo hicimos, las soluciones $r_\pm(t) = e^{\pm\omega_0 t}$ no son proporcionales así que de acuerdo con los descubrimientos rigurosos de nuestros amigos los matemáticos, la solución más general posible de la ecuación de movimiento radial del collarín que estamos estudiando es:

$$r(r) = A_+\, e^{\omega_0 t} + A_-\, e^{-\omega_0 t}\,. \tag{64}$$

Ahora que ya conocemos una fórmula general para el movimieto radial del collarín volvamos a nuestro experimento mental.

¿Qué es lo único que podemos hacerle al collarín que nos interesa?, pues lanzarlo desde alguna posición de la guía, esto es, darle un empujón en algún punto de la guía (es decir, darle un par de condiciones iniciales $r(0$ y $v(0))$. Hagámos esto y veamos lo que ocurre, al evaluar la posición y la velocidad radiales en $t = 0$ obtenemos

$$A_+ + A_- = r_0 \tag{65}$$

$$A_+ - A_- = v_0/\omega_0 \tag{66}$$

de allí encontramos los valores específicos de las constantes que nos permiten satisfacer las condiciones

$$A_{+} = \frac{r_0 + v_0/\omega_0}{2}, \qquad A_{-} = \frac{r_0 - v_0/\omega_0}{2} \tag{67}$$

de acuerdo a estos resultados parciales, la solución completa al problema de condiciones iniciales que nos hemos planteado es

$$r(t) = \frac{r_0 + v_0/\omega_0}{2}\, e^{\omega\, t} + \frac{r_0 - v_0/\omega_0}{2}\, e^{-\omega\, t}\,, \tag{68}$$

que podemos reexpresar en la forma

$$r(t) = r_0\, cosh(\omega_0\, t) + \frac{v_0}{\omega_0}\, senh(\omega_0\, t)\,. \tag{69}$$

Esta fórmula contiene los resultados de nuestro *Gedankenexperiment*. Para hacer las observaciones experimentales debemos recordar que dada la formulación del problema que estamos estudiando, el radio r_0 no puede ser negativo (representa la distancia al centro de rotación) adicionalmente, el tiempo también debe ser no negativo, es decir: $t \geq 0$. Dicho esto, notemos que para $r \neq 0$ existen tres posibilidades para el movimiento, (i) $v_0 = 0$, (ii) $v_0 > 0$ y claro $v_0 < 0$.

El primer caso corresponde a colocar al collarín en un punto de la guía sin dotarle de velocidad radial y la solución se reduce a

$$r(t) = r_0\, cosh(\omega_0\, t)\,. \tag{70}$$

pero el coseno hiperbólico es una función creciente no negativa para todos los valores de $t > 0$ así que con estas condiciones iniciales el collarín se aleja del centro con rapidez radial $\dot{r} = r_0\, \omega_0\, senh(\omega_0\, t)$ que también es una función de crecimiento exponencial, es decir, el collarín se aleja del centro con rapidez creciente.

En el segundo caso, las cosas no cambian mucho ya que tanto el seno como el coseno hiperbólico son exponencialente crecientes para valores positivos de t y sencillamente ocurre que el movimiento del collarín es centrífugo pero con rapidez inicial no nula.

El tercero y último caso es el más interesante, y corresponde a lanzar al collarín hacia el centro. En esta primera versión de estre texto en que no vamos a incluir gráficos del problema en estudio hay que poner unos grafiquitos para poder explicar las cosas en detalle nos limitaremos a que: independientemente de la rapidez inicial, no es posible hacer llegar el collarín al centro. La prueba es sencilla. Sea t_c el instante en que el collarín alcance el centro de rotación. En ese caso

$$r_0\, cosh(\omega_0\, t_c) + \frac{v_0}{\omega_0}\, senh(\omega_0\, t_c) = 0 \tag{71}$$

$$r_0\, \omega_0\, senh(\omega_0\, t_c) + v_0\, cosh(\omega_0\, t_c) = u \tag{72}$$

con algún valor no negativo de u.

Podemos despejar v_0 de la primera ecuación para obtener

$$v_0 = -r_0\, \omega_0 \frac{cosh(\omega_0\, t_c)}{senh(\omega_0\, t_c)}\,, \tag{73}$$

este resultado es negativo y por lo tanto luce prometedor (claro, para hacer llegar el collarín hasta el centro hay que trattar de lanzarlo hacia allá, al sustituir este resultado en la segunda ecuación resulta

$$r_0\, \omega_0\, senh(\omega_0\, t_c) - r_0\, \omega_0 \frac{cosh^2(\omega_0\, t_c)}{senh(\omega_0\, t_c)} = u \tag{74}$$

ó

$$\frac{r_0\, \omega_0\, senh^2(\omega_0\, t_c) - r_0\, \omega_0\, cosh^2(\omega_0\, t_c)}{senh(\omega_0\, t_c)} = u \tag{75}$$

la identidad hiperbolica $cosh^2 a - cosh^2 a = -1$ implica que

$$u = -\frac{r_0\,\omega_0}{senh(\omega_0\,t_c)} \tag{76}$$

que es un resultado no positivo. Pero u tiene que ser no negativo (ya que las distancias radiales negativas no están definidas). La única posibilidad que queda es pues colocar $r_0 = 0$ que corresponde al caso en que el collarín se coloca inicialmente en reposo en el centro y permanece allí permanentemente.

En resumen, nuestro *Gedankenexperiment* demuestra -si la mecánica de Newton es correcta- lo que nos dice nuestra intuición: la tendencia del collarín será siempre moverse hacia afuera.

ering